Irrationalität von e

Herleitung der abbrechenden TAYLORschen Formel mit Restglied für e

Ausgegangen wird von der TAYLORschen Formel mit Restglied (Formelsammlung S. 51).
Diese Formel ergibt angewendet für e^x den folgenden Ausdruck:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x} \quad \text{mit } 0 < \vartheta < 1$$

Setzt man x = 1 ein, so erhält man:

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\vartheta} \quad \text{mit } 0 < \vartheta < 1$$

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\vartheta} \quad \text{mit } 0 < \vartheta < 1 \qquad \text{(Gl. 1)}$$

Nachweis der Irrationalität von e mittels Widerspruchsbeweis:

Ausgegangen wird vom Gegenteil, nämlich, dass sich e als $e = \frac{p}{q}$ schreiben ließe,

wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ sind.
Ergibt diese Annahme einen Widerspruch, so ist der Nachweis für die Irrationalität erbracht.
Dazu wird e mit n! multipliziert:

$$\Rightarrow n!e = n!\frac{p}{q} \qquad \text{(Gl. 2)}$$

Da n frei wählbar ist, können wir gewiss n größer als q wählen, wodurch die rechte Seite der Gleichung 2 stets eine ganze Zahl ist.
Dies ergibt sich daraus, dass für n > q in n! stets auch die Zahl q als ein Faktor enthalten ist und sich somit mit q kürzen lässt. Dadurch ist gezeigt, dass $\frac{n!}{q}$ eine natürliche Zahl ist, und folglich $\frac{n!}{q}p$ eine ganze Zahl sein muss.
Als Schlussfolgerung aus Gl. 2 muss nun aber auch $n!e$ eine ganze Zahl sein.

Andererseits lässt sich $n!e$ durch Gl. 1 auch als

$$n!e = 2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} e^{\vartheta}$$

schreiben. Dieser Ausdruck kann unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $(n+1)! = n!(n+1)$ ist, wie folgt gekürzt werden:

$$n!e = \underbrace{2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + 1}_{\hat{=}\text{ ganzer Zahl}} + \frac{1}{n+1} \underbrace{e^{\vartheta}}_{\substack{\text{da bekannt ist, dass e < 3 muss} \\ e^{\vartheta} \text{ zwischen 1 und 3 liegen.}}} \qquad \text{mit } 0 < \vartheta < 1$$

Es müsste also die ganze Zahl n!e gleich der ganzen Zahl $2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + 1$ plus einem nicht verschwindenden echten Bruch sein, was nicht möglich ist.

Widerspruch e ist Irrational